CINÉMATIQUE : MOUVEMENTS PLANS

Objectifs du COURS :

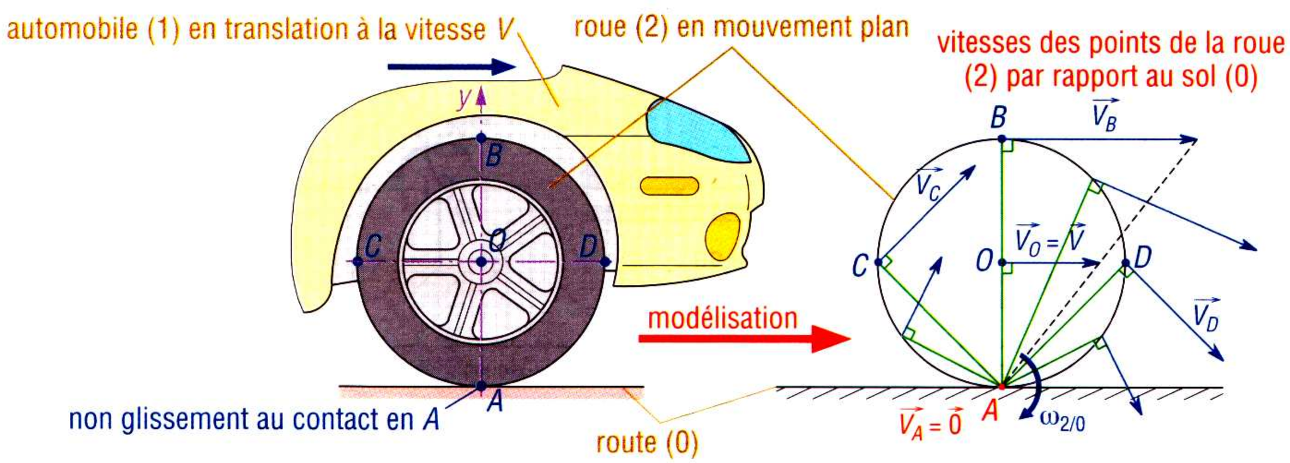
Ce cours traitera essentiellement les points suivants :

- Descriptions des caractéristiques des mouvements plans
- Définitions et notions d'équiprojectivité et de centre instantané de rotation (CIR)
- Relations vectorielles liant les vitesses de deux points appartenant à un même solide
- Exercices d'application

Lorsqu'un solide est en mouvement plan, tous les points se déplacent dans des plans parallèles à un plan de référence. Toutes les lignes (parallèles au plan de référence) se déplacent dans un même plan et tournent par rapport à leur position initiale. Aucun point du solide n'est fixe. Une translation plane et une rotation d'axe fixe peuvent être considérées comme des mouvements plans particuliers.
L'étude des mouvements plans peut se faire selon deux approches différentes.

L'analyse absolue : cette méthode est utilisée lorsque les problèmes sont faciles à décrire géométriquement **(mise en équations)** à partir d'un même repère de référence.

L'analyse relative : cette méthode utilise le fait que la distance entre deux points d'un même solide reste fixe ou constante, ce qui entraîne **la propriété d'équiprojectivité et celle du CIR.**
Les caractéristiques cinématiques en un point sont déterminées à partir de celles connues en un autre point.
La méthode est bien adaptée à l'étude des mécanismes complexes comprenant de nombreux solides en liaison ou lorsque les problèmes sont difficiles à décrire géométriquement.
Les méthodes graphiques permettent des résolutions rapides.

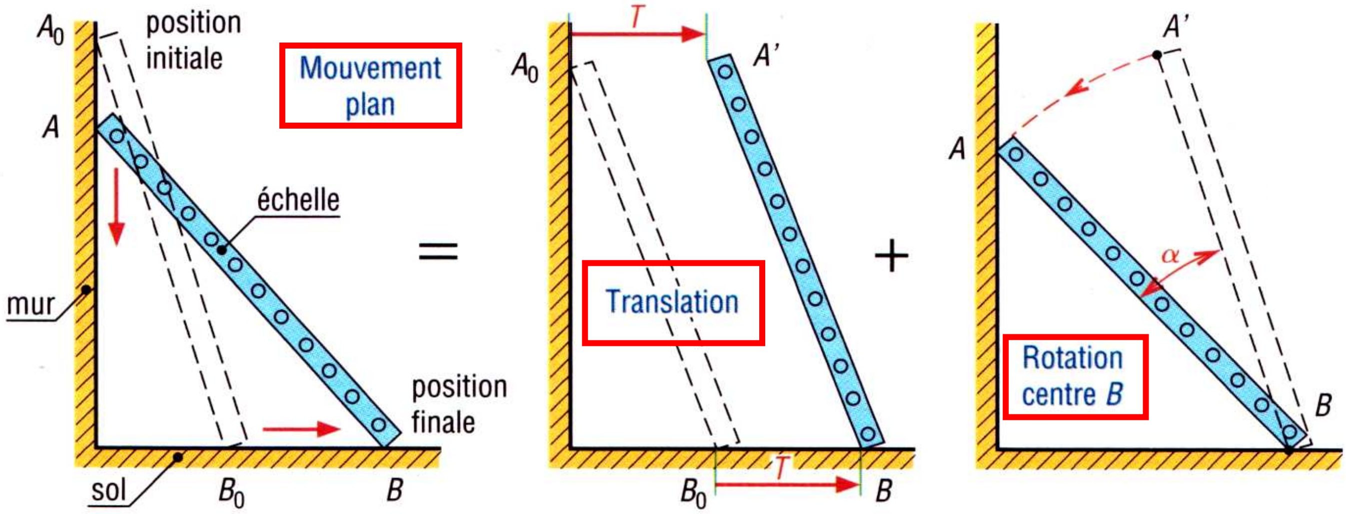


ÉTUDE GÉNÉRALE

Un mouvement plan peut être considéré comme l'addition d'une translation et d'une rotation d'axe fixe.

EXEMPLE 1

Prenons le cas d'une échelle posée en B sur le sol et appuyée en A sur un mur.

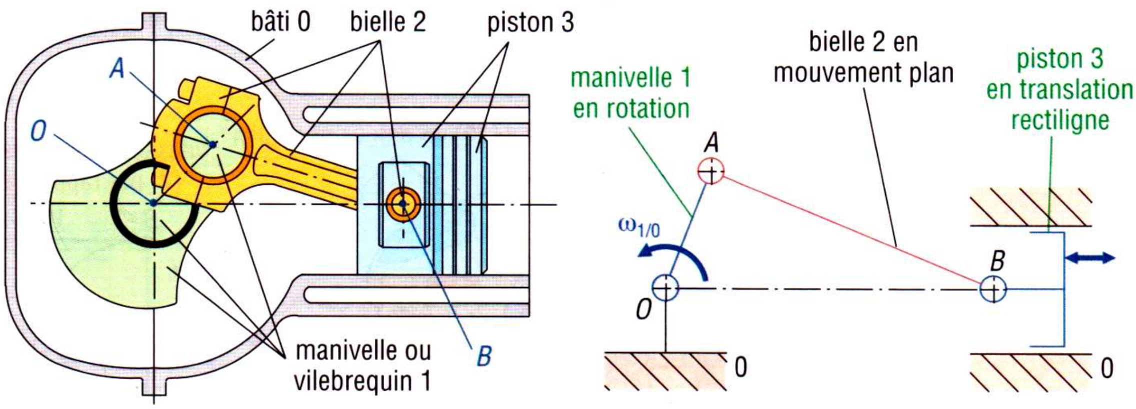


L'échelle décrit **un mouvement plan** par rapport à l'ensemble (sol + mur).
Pour passer de la position initiale (A_0,B_0) à la position finale (A,B), on peut faire une translation (T) amenant A_0 en A' et B_0 en B suivie d'une rotation d'axe B, d'angle α, amenant A' en A.

Remarque : compte tenu de cette propriété, l'étude des mouvements plans se ramène **à l'addition ou la combinaison d'une translation et d'une rotation d'axe fixe.**

EXEMPLE 2

Prenons le cas du système bielle manivelle.



Les liaisons en O, A et B sont des pivots dont les axes sont perpendiculaires au plan de la figure.

Mvt $_{3/0}$ = **translation rectiligne de direction OB**

Mvt $_{1/0}$ = **rotation d'axe O**

Mvt $_{2/0}$ = **mouvement plan général**

Remarque : **Mvt $_{3/0}$ et Mvt $_{1/0}$ sont des mouvements plans particuliers.**

ÉQUIPROJECTIVITÉ

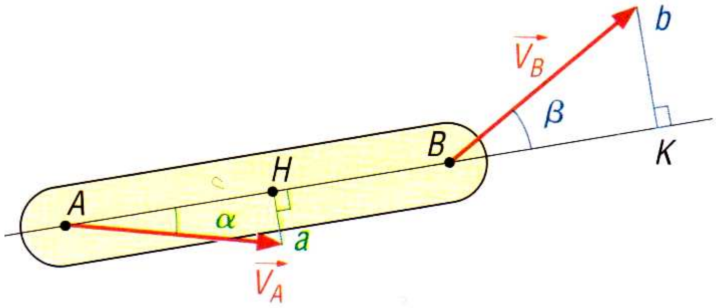
La propriété d'équiprojectivité est l'une des propriétés les plus importantes de la cinématique du solide. Abordée à l'occasion du mouvement plan, elle est également vérifiée pour des mouvements quelconques de solides dans l'espace. Elle est la conséquence du fait **que la distance entre deux points d'un même solide reste fixe ou constante.**

EXEMPLE

Soit deux points A et B appartenant à un même solide et $\vec{V_A}$ et $\vec{V_B}$ les vecteurs vitesses respectifs.

La projection orthogonale de $\vec{V_A}$ sur AB est égale à la projection orthogonale de $\vec{V_B}$ sur AB.

Autrement dit, le produit scalaire de $\vec{V_A}$ par $\vec{AB}$ est égale au produit scalaire de $\vec{V_B}$ par $\vec{AB}$.



$$\vec{V_A} \cdot \vec{AB} = \vec{V_B} \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{AH} = \vec{BK}$$

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$$

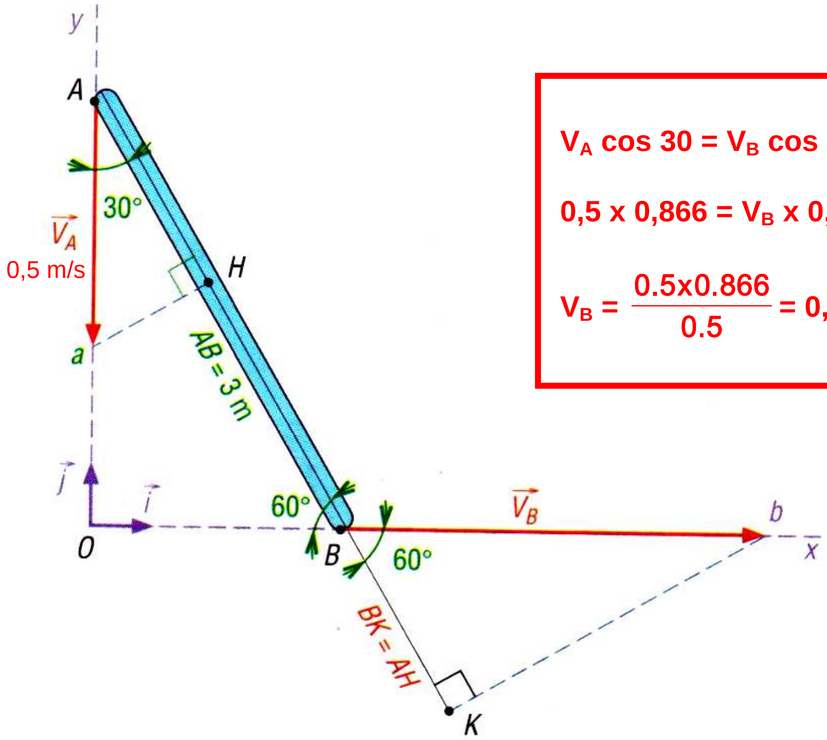
Remarques : aH et bK sont perpendiculaires à AB.
H et K sont tous deux situés du même côté par rapport à A et B (à droite sur la figure).
La propriété est vérifiée pour tous les points du solide, pris deux à deux, de manière quelconque.
De ce fait, on dit que **le champ des vitesses est équiprojectif.**
En pratique, pour tout solide en mouvement plan, il suffit de connaître complètement la vitesse d'un point et la direction d'une autre, pour déterminer la vitesse de tous les points.

EXERCICE D'APPLICATION N°1

D'après la figure page suivante :

Question

Déterminer par le calcul la vitesse au point B.



$V_A \cos 30 = V_B \cos 60$

$0,5 \times 0,866 = V_B \times 0,5$

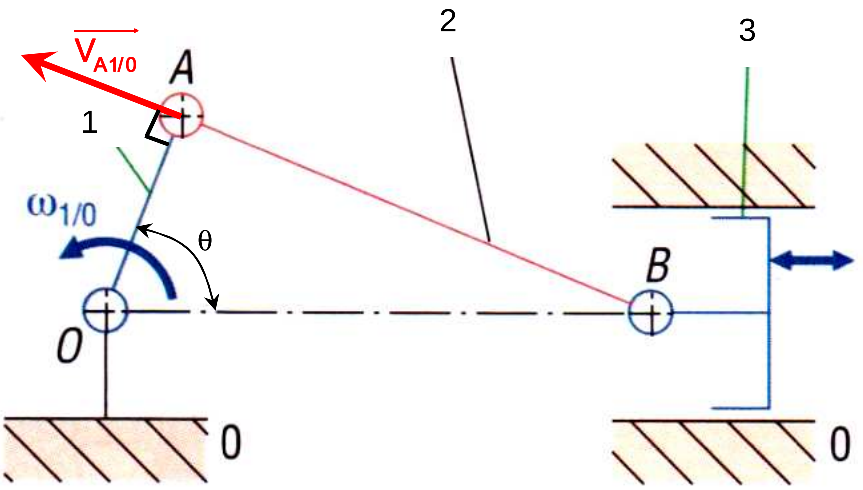
$V_B = \dfrac{0.5 \times 0.866}{0.5} = 0,866$ m/s

EXERCICE D'APPLICATION N°2

Reprenons l'exemple du système bielle manivelle, avec OA = 35 mm ; AB = 128 mm ; $\omega_{1/0}$ = 100 rad/s.

Question 1

Déterminer par le calcul la vitesse en A.



$V_A = V_{A1/0} = V_{A2/0} = \omega_{1/0} \times OA = 100 \times 0,035 = 3,5$ m/s

$\overrightarrow{V_{A1/0}}$ est perpendiculaire en A à OA (propriété de la rotation).

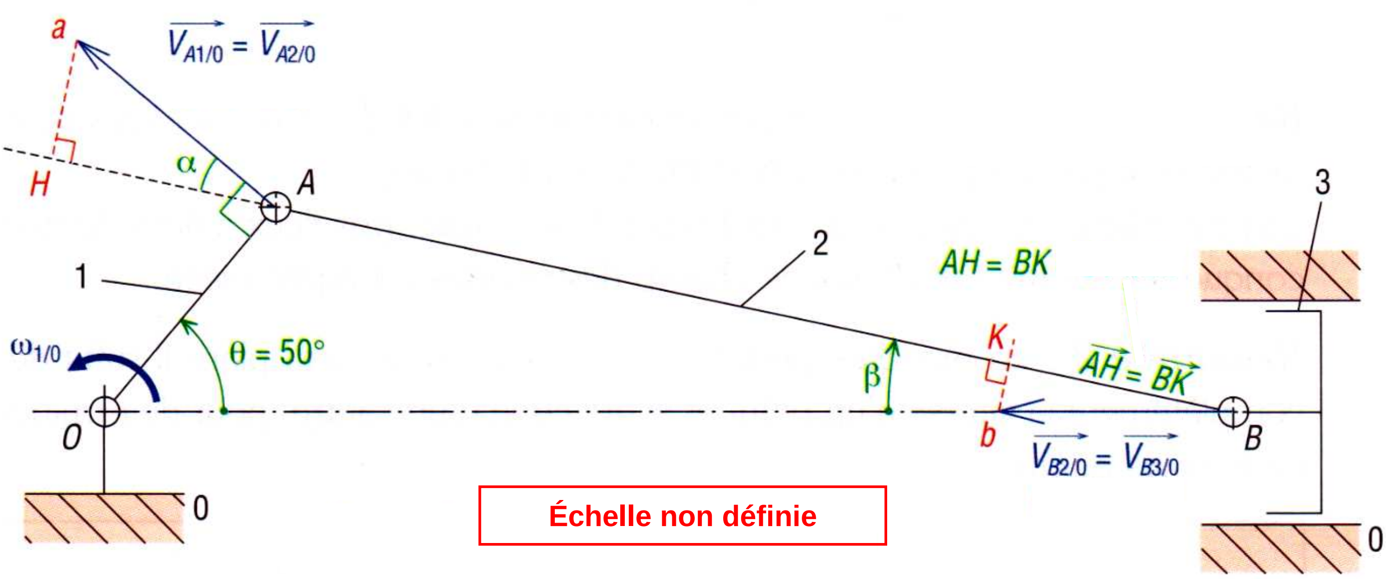
Remarque : A étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 2, il en résulte que $\overrightarrow{V_{A1/0}} = \overrightarrow{V_{A2/0}}$.
Même remarque en B entre 2 et 3 : $\overrightarrow{V_{B2/0}} = \overrightarrow{V_{B3/0}}$.

Sachant que V_A = **3,5 m/s** et θ = **50°** :

Question 2

Déterminer (graphiquement) par équiprojectivité sur AB la vitesse au point B.

Constructions graphiques :
Tracer la figure à l'échelle 1:1 (par exemple).
Choisir une échelle des vitesses (1 cm représente 1 m/s par exemple).



Mesure de V_B à l'échelle choisie : **V_B = 3,15 m/s.**

Remarque : Si une grande précision est nécessaire, un calcul est possible :

AB x sin β = OA x sin θ

α = 90°- θ - β

V_A cos α = V_B cos β

V_B = 3,164 m/s

128 x sin β = 35 sin 50°= 26,811

$$\sin\beta = \frac{26.811}{128} = 0{,}2094$$

β = 12,087°

3,5 cos 27,913°= V_B cos β

$$V_B = \frac{3.092}{\cos\beta} = 3{,}164 \text{ m/s}$$

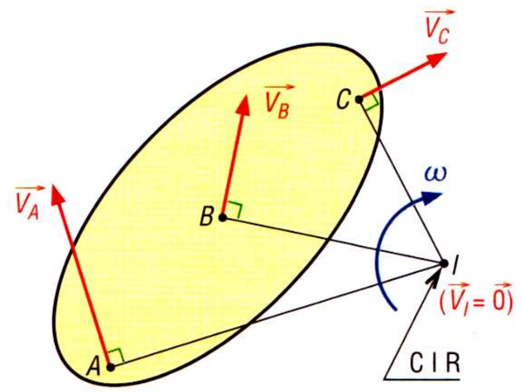
CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION (CIR)

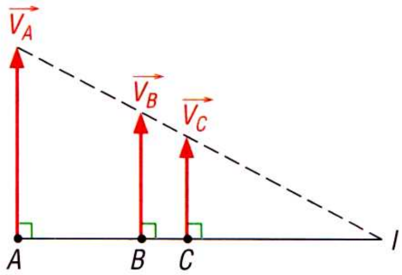
DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

Pour tout solide en mouvement plan, il existe un point I et un seul, ayant une vitesse nulle ($\vec{V_I} = \vec{0}$) à l'instant considéré et appelé **Centre de Rotation Instantané de Rotation (CIR).**

Remarque : le CIR a les propriétés d'un centre de rotation à l'instant (t) considéré.
À l'instant suivant (t' = t + Δt), le CIR a changé de position géométrique. Cette position varie au cours du temps et décrit une certaine trajectoire.

DÉTERMINATION ET CONSTRUCTION DU CIR





$$\frac{V_A}{IA} = \frac{V_B}{IB} = \frac{V_C}{IC} = \omega$$

En tant que centre de rotation, le CIR est situé **à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs-vitesses du solide.**

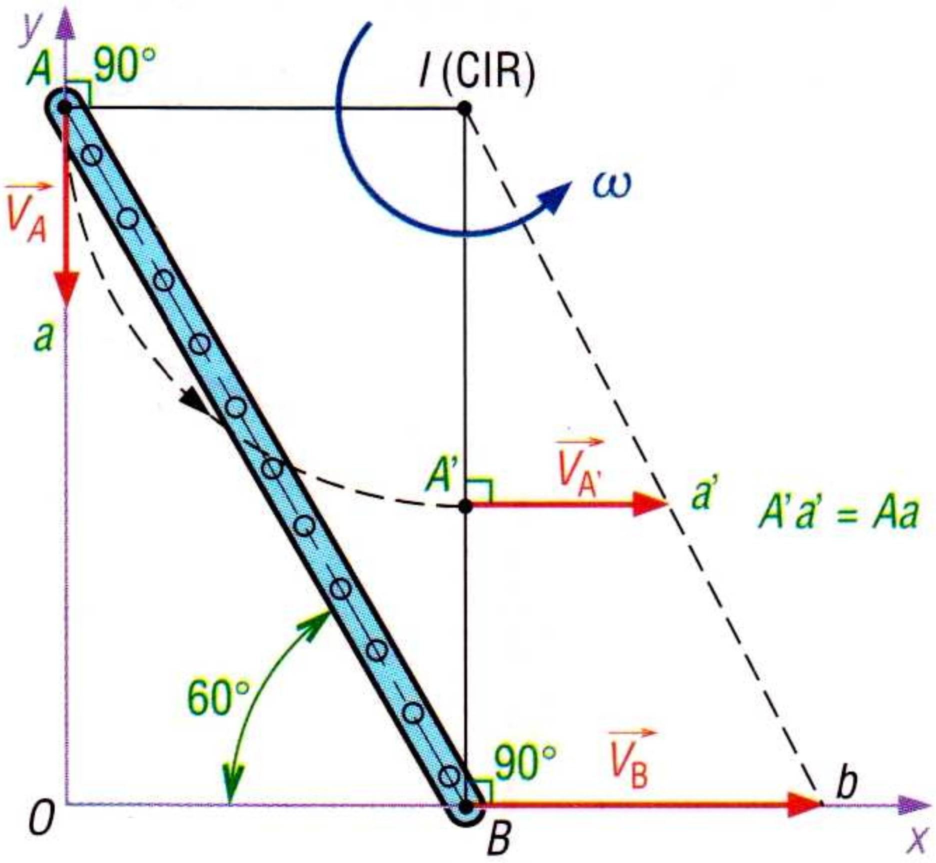
EXERCICE D'APPLICATION

Reprenons l'exemple de l'échelle (voir page suivante).

Question 1

Rechercher le CIR(I).

Constructions graphiques :
Choisir une échelle est tracer la figure.
Choisir une échelle des vitesses.



Question 2

Retrouver la valeur de ω.

$$\frac{V_A}{IA} = \frac{V_B}{IB} = \omega$$

IA = AB cos 60°= 3 x cos 60°= 1,5 m

$$\omega = \frac{V_A}{IA} = \frac{0.5}{1.5} = 0{,}33 \text{ rad/s}$$